Aritmética modular

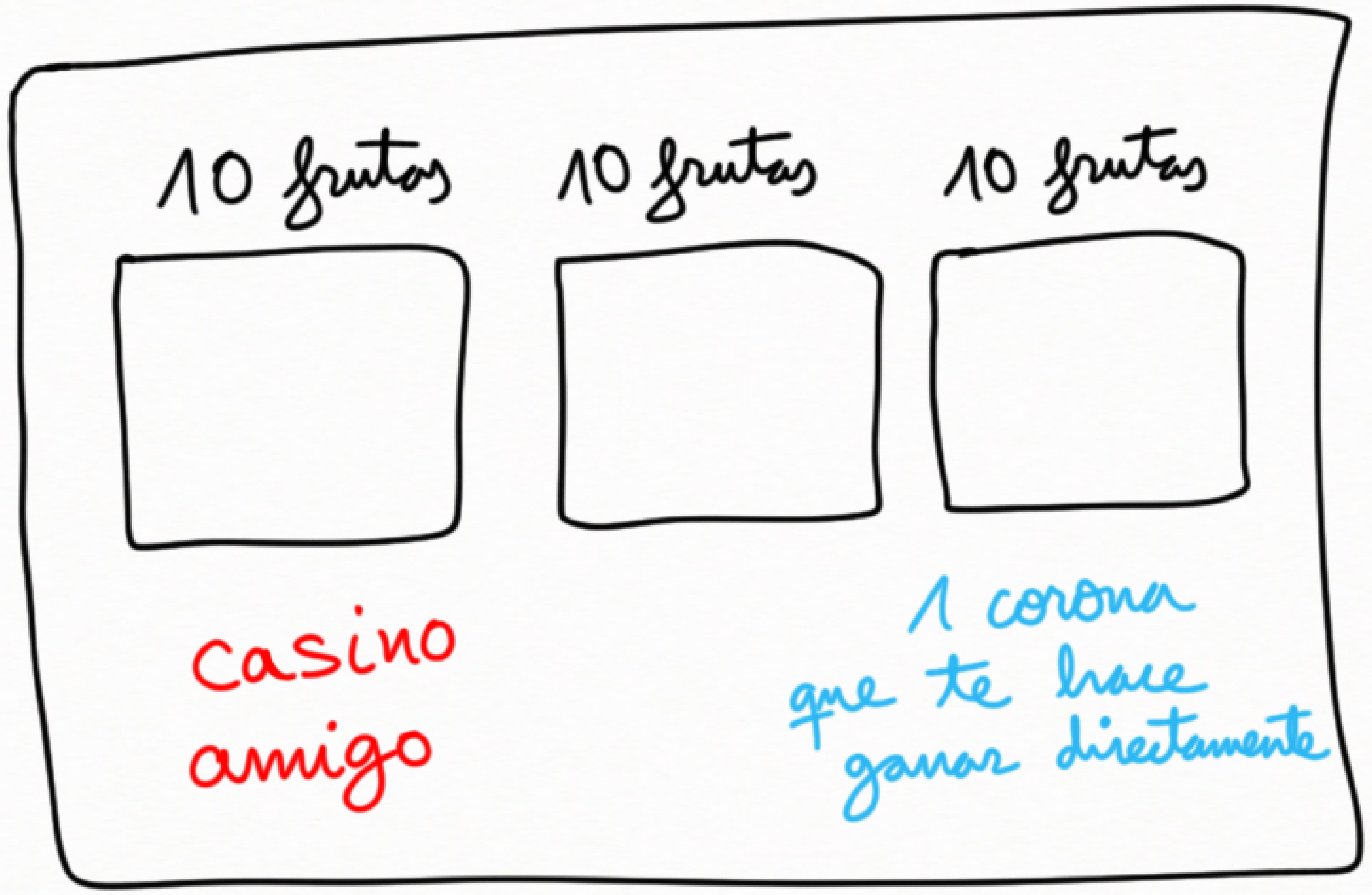
$a \equiv b \bmod m \iff m \mid (a-b) \iff$ el resto al dividir a y b entre m respectivamente coincide.

Operaciones permitidas: suma y multiplicación (anillos cociente $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$)
(asociativa, distributiva, $\exists 1$) por enteros

Ejemplo: $5 \equiv 2 \bmod 3$

$11 \equiv 2 \bmod 3$

1 % VS 10 %



¿ posibles resultados ?

$10 \cdot 10 \cdot 11$

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{10 + 100}{10 \cdot 10 \cdot 11} \; ;$$

7 amigos, 4 asientos (el resto se queda de pie :( )

Maneras de distribuir a los amigos en los asientos:

$$\underset{1}{\sqcup} \quad \underset{2}{\sqcup} \quad \underset{3}{\sqcup} \quad \underset{4}{\sqcup}$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

En general, maneras de poner en fila n amigos: $n!$

Permutaciones: $$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Combinaciones:

Dado un grupo de n amigos, maneras de escoger K de ellos para asistir a una charla. Aquí el orden en que se escogen no importa.

$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = \binom{n}{n-K}$$

son permutaciones suprimiendo los casos en que se ordenan los mismos elementos.

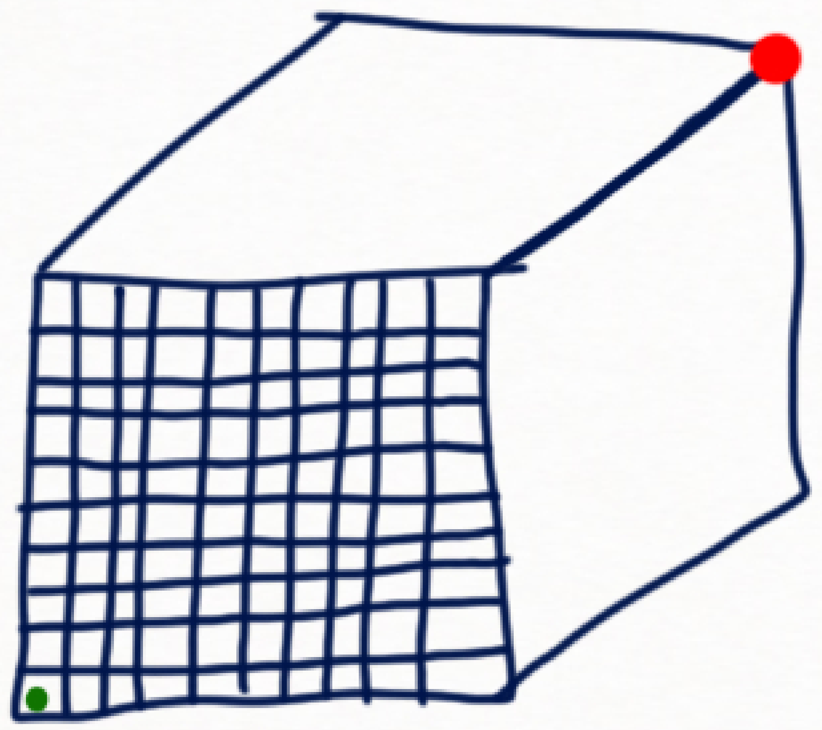
- $$\binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K} = \binom{n}{K}$$

Pasar la demo. cuando lleguemos a binomio de Newton.

Sumar casos que no tienen que ver entre sí.

Multiplicar si hay que combinar casos de algo con otra cosa.

Problema 5. Cubo $10 \times 10 \times 10$ con saltamontes en esquinita.



Solo le está permitido avanzar en la dirección correcta y solo puede saltar a cubos adyacentes.

¿ Maneras de llegar a la esquina contraria ?

Ordenar 9A, 9F, 9D (el orden importa)

Resultado : $\dfrac{27!}{9! \cdot 9! \cdot 9!}$

Problema 7. Maneras de distribuir 20 bolas idénticas en 6 cajas.

Es lo mismo que ordenar un conjunto de 5 separadores y 20 bolas:

$\frac{(20+5)!}{5!\cdot 20!}$; ejemplo con 3 separadores y 7 bolas:

¿y si no puede quedar ninguna vacía? $\equiv$ meter 5 separadores en 19 huecos

$\equiv$ escoger 5 de 19 huecos sin que importe el orden $\binom{19}{5}$

Binomio de Newton

Teorema: Dados $a, b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

24/3/2012

4. Hallar todos los números enteros positivos n **y** k**, tales que** $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

(pasar demo)

- $n = 1 \Rightarrow 1 + 1 \neq 2 + 3 + 1$
- $n \geq 2 \Rightarrow$ aplicamos binomio de Newton:

$$(1+n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot n^k = 1 + n^2 + \binom{n}{2} n^2 + \binom{n}{3} n^2 + \dots$$

$\Rightarrow (1+n)^n - 1 = 2n^k + 3n$ es múltiplo de n^2.

Caso $K=1$: $n^2 \mid 2n^1+3n = 5n \Longrightarrow n \mid 5$ y como es primo $\Longrightarrow n=5$.

Vemos si cumple la ecuación: $(5+1)^5 \neq 2\cdot 5 + 3\cdot 5 + 1$

Caso $K \geqslant 2$: $n^2 \mid 2n^k + 3n \Longrightarrow n^2 \mid 3n \Longrightarrow n \mid 3$ y como es primo, $\Longrightarrow \boxed{n=3}$

La ecuación pasa a ser: $\underbrace{4^3}_{64} = 2\cdot 3^k + 10 \Longleftrightarrow 27 = 3^k \Longleftrightarrow \boxed{K=3}$

23/3/2012

3. Sean x y n enteros tales que $1 \le x < n$. Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Sea p número primo, encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x \in \{1,2,\dots,n-1\}$.

$x+1$ cajas $\Longrightarrow$ x separadores. $n-x$ bolas iguales. $n-x+n = n$ objetos.

$$\frac{n!}{x!\cdot(n-x)!} = \binom{n}{x};$$

Encontrar $n>1 \mid p \mid f(n,x)\ \forall x \in \{1,2,\dots,n-1\}$

Si $p \mid \binom{n}{x}\ \forall x \in \{1,2,\dots,n-1\}$, $\Longrightarrow$ $p \mid \binom{n}{1} = n$.

Sea m de la forma $q\cdot p^a$, su p-parte se define como $m_p = p^a$.

Resultado intermedio útil:

- Queremos ver si $m_p = p^a \Rightarrow (m-i)_p = i_p \quad \forall\, i \in \{1, 2, \dots, p^a - 1\}$
  - $i_p = p^K \Rightarrow \underline{K < a} \Rightarrow p^K \mid (m-i) \quad [\, p^K \mid (\overset{(\text{hip})}{q \cdot p^a} - r \cdot p^K) \,] \Rightarrow i_p \leq (m-i)_p$ ■
  - $(m-i)_p = p^K \Rightarrow K < a$ porque si $K \geq a \Rightarrow p^a \mid i$!!!

$p^K \mid m,\ p^K \mid m-i \Rightarrow \begin{cases} m \equiv 0 \bmod p^K;\ m-i \equiv 0 \bmod p^K \\ m-i-m \equiv 0 \bmod p^K \Rightarrow i \equiv 0 \bmod p^K \end{cases} \Rightarrow p^K \mid i \Rightarrow$

$\Rightarrow (m-i)_p \leq i_p$ ■

Probar $p \mid \binom{n}{x} \quad \forall\, x \in \{1, 2, \dots, n-1\} \iff n = p^a$

$\boxed{\Longrightarrow}$ En particular, $p \mid \binom{n}{1} = n$; tomamos $n_p = p^a$ hip.

$$\binom{n}{p^a} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-p^a+1)}^{\text{solo 1 múltiplo de } p^a}}{p^a(p^a-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1}$$; como debe ser $p \mid \binom{n}{p^a}$, y $(m-i)_p = i_p$

$$\Downarrow$$

$$\binom{n}{p^a}_p = 1 \Longleftarrow \begin{cases} (n-1)_p = (1)_p \\ \vdots \\ (n-(p^a-1))_p = (p^a-1)_p \end{cases}$$

lo cual sería una contradicción a menos que $p^a = n \neq x$

Ya sabemos que n es de esa forma, ahora veamos si todos los $n = p^a > 1$ cumplen el enunciado.

$\boxed{\Leftarrow}$ $n = p^a$, $\Rightarrow \forall x \in \{1, 2, \ldots, p^a - 1\}$:

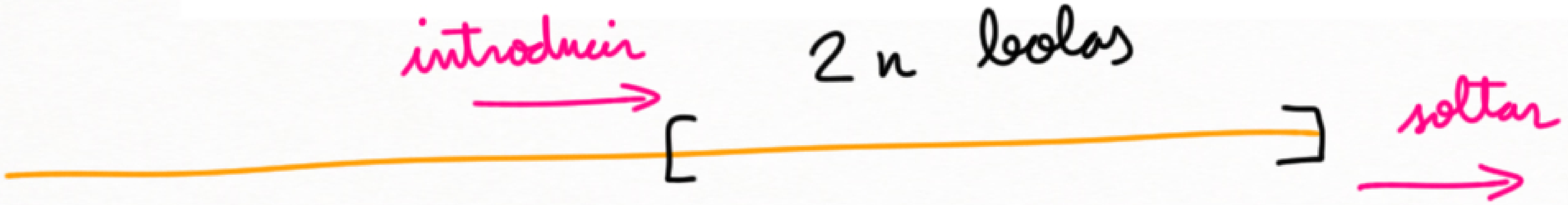
$$\binom{n}{x} = \frac{p^a(p^a-1)\cdot \ldots \cdot (p^a-x+1)}{x(x-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} (p^a-1)_p = (1)_p \\ \quad \ddots \\ (p^a-(x-1))_p = (x-1)_p \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{n}{x}_p = \frac{p^a}{x_p}$$, que es múltiplo de p porque $x < p^a$.

Problema 6

Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

3/3/2003



$4n$ bolas en total

$2n$ blancas, $2n$ negras

de las cuales y son blancas, x son negras.

Objetivo : $K = 0$

$y + x = 2n \Longrightarrow y - x = 2K, \ |K| \leq n.$

$2K \to 2(K+1)$, $2K \to 2(K-1)$

y cuando se llega al otro extremo: $x - y = 2K$

$\Downarrow$

$y - x = -2K$

Y como los pasos se dan de uno en uno, en algún momento $K = 0$.

3. Sean x y n enteros tales que $1 \leq x < n$. Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Sea p número primo, encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x \in \{1,2,...,n-1\}$.

Problema 6

Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.